NIVERSITE SIDI MOHAMMED BEN ABDELLAH
Faculté des Sciences Juridiques,
Economiques et Sociales
Fès



Année Universitaire: 2012-2013
Filière : Economie et Gestion
Premier Semestre
Sections : C et D

T.D. de Microéconomie 1 (Série n°1)

Equipe pédagogique : Hemmi, Dyane, Mounaïm, Nejjari et Taoudi

---

I- Approche cardinale de l'utilité

Exercice n°1

Un consommateur rationnel dispose d'un revenu de **10** dh, il cherche à répartir ce revenu entre deux biens X et Y en vue de maximiser sa satisfaction. Les prix des biens sont P_x= 1 dh et P_y= 3 dh. Les utilités totales de ces biens évoluent en fonction des quantités consommées comme indiqué sur le tableau :

Quantités des biens X et Y	1	2	3	4	5	6
Utilité totale de bien X	10	19	27	34	40	44
Utilité totale de bien Y	24	45	63	78	87	90

1. Définir l'utilité marginale et préciser sa signification économique et mathématique.
2. Comment évoluent les utilités marginales des biens lorsque les quantités passent de 1 à 6 ? Quelle explication peut-on avancer à propos de cette évolution ?
3. Dans quelle mesure la croissance de l'utilité totale vérifie t-elle l'hypothèse de non-saturation des besoins ?
4. Définir et calculer l'utilité marginale pondérée.
5. Calculer l'utilité totale correspondant à l'utilisation optimale du revenu de ce consommateur.
6. Que pensez-vous des hypothèses de la **cardinalité** et de l'**additivité** des utilités ?

Exercice n°2

Soit un consommateur rationnel qui dispose d'un revenu de **12** dh. Son objectif est de répartir ce revenu entre deux biens X et Y en vue de maximiser sa satisfaction. Les prix des biens sont P_x=2 dh et P_y=4 dh. Les utilités marginales (Um) de ces biens évoluent en fonction des quantités comme indiqué sur le tableau :

Quantités	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Um de bien X	120	100	90	70	50	25	10	0	- 10	- 20
Um de bien Y	240	200	180	140	100	50	20	0	- 20	- 40

1. En quoi consiste la 1ère **loi de Gossen** ? Est-elle vérifiée dans le tableau ci-dessus?
2. Déterminer la **combinaison** optimale des biens X et Y et l'utilité totale maximale (du revenu dépensé).
3. Quelle deviendra la combinaison optimale si le revenu passe à 24 dh ?
4. Comparer les questions 2 et 3 suite à l'augmentation du revenu.

II- Approche ordinale de l'utilité

Exercice n°3

Un consommateur possède la fonction d'utilité suivante : **$U = f(x,y) = 2xy + 3y$**
x et y représentent les quantités consommées des biens X et Y.
Le revenu de ce consommateur est R=150 dh, les prix des biens X et Y sont respectivement P_x=12 dh et P_y=21 dh.

1. Donner l'expression du TMS de x à y.
2. Calculer l'équation de la droite du budget.
3. Déterminer les quantités des biens X et Y qui correspondent à l'utilisation optimale du revenu de ce consommateur.
4. Supposons que ce consommateur souhaite réaliser un niveau d'utilité **U=70**, quel est le revenu minimum qui lui est nécessaire ?
5. Calculer le $TMS_{x/y}$ au point d'équilibre obtenu dans la question 3, quelle est sa signification ?
6. Représenter graphiquement les deux optimums du consommateur précédemment trouvés.

Exercice n°4

La fonction d'utilité d'un consommateur rationnel est de la forme suivante :

$$U = f(x,y) = 2x^2y$$

x et y représentent les quantités consommées des biens X et Y.

1. Sachant que le revenu du consommateur est de **150** dh et que les prix des biens X et Y sont respectivement P_x = 10 dh et P_y= 20 dh, déterminer la combinaison optimale des biens X et Y ainsi que l'indice d'utilité correspondant.
2. Supposons que le prix du bien X augmente et s'établit à P_x = 15 dh, alors que le prix du bien Y et le revenu restent constants, calculer l'effet de l'augmentation de P_x sur la consommation des biens X et Y en distinguant l'effet de substitution et l'effet de revenu.
3. Si le prix du bien X devient variable (R et P_y restant constants) déterminer, et ce après avoir défini la courbe de **consommation-prix**, l'équation de la demande du bien X en fonction de son prix. S'agit-il d'une demande optimale ? Calculer l'élasticité prix de cette demande.
4. Supposons maintenant que le revenu devient variable et que les prix des biens X et Y sont constants, déterminer, et ce après avoir défini la courbe de **consommation-revenu**, l'équation de la courbe d'Engel pour le bien X. S'agit-il d'une demande optimale ? Quelle est son élasticité-revenu ?
5. Préciser le **statut économique** du bien X : est-il un **bien normal** ou un **bien inférieur** ?

Exercice n°5

Les préférences d'un consommateur, pour deux biens X et Y, sont représentées par la fonction d'utilité $U = f(x,y) = x.(y + 1)$; où x et y représentent les quantités consommées des biens X et Y, U étant l'indice d'utilité. Les prix des biens sont P_X = **5** dh et P_Y = **10** dh. Le revenu du consommateur est **R = 190** dh.

Expliquez le passage de la fonction d'utilité à la fonction de demande. Illustrez votre démarche en déterminant, pour le bien X, la fonction de demande en fonction du revenu et du prix P_X.

UNIVERSITE SIDI MOHAMED BE…
FACULTE DES SCIENCES JURI… …CONOMIQUES
ET SOCIALES
FES

…sitaire : 2010-2011
Premier Semestre
Sections : C et D

Corrigé de la série n°1

Exercice 1

1. Définition et signification de l'utilité marginale

Définition : L'Um mesure la variation de l'UT provoquée par la variation unitaire de la quantité consommée.

Economiquement parlant, L'Um traduit la satisfaction procurée par une petite dose du bien pour subvenir à une petite dose du besoin.

Mathématiquement, l'Um est représentée par la dérivée première de l'UT.

- Si le bien est non divisible : Um $= \frac{\Delta UT}{\Delta q} = \frac{UT_n - UT_{n-1}}{q_n - q_{n-1}}$: Fonction discontinue.
- Si le bien est divisible : Um $= Lim_{\Delta q \to 0} \frac{\Delta UT}{\Delta q} = \frac{dU}{dq} = (UT)'$: Fonction continue.

L'Um est une fonction décroissante de la quantité consommée. En effet, à mesure qu'un besoin est satisfait son intensité diminue (1ère loi de Gossen).

2. Evolution des Um des biens

Quantités de biens	1	2	3	4	5	6
Utilité marginale de X	10	9	8	7	6	4
Utilité marginale de Y	24	21	18	15	9	3
Um pondérée de X : $\frac{Um_x}{P_x}$	10	9	8	7	6	4
Um pondérée de Y : $\frac{Um_y}{P_y}$	8	7	6	5	3	1

Les utilités marginales des biens X et Y sont décroissantes conformément à la première loi de Gossen qui stipule que : "l'intensité d'un plaisir qui se prolonge finit par s'éteindre au point de satiété, au-delà de ce point le plaisir se transforme en peine".

3. Hypothèse de non saturation du besoin

Le besoin est saturé lorsque l'utilité totale est maximale. Au point de satiété l'utilité marginale est égale à zéro. Dans le cas présent aucune utilité marginale n'est nulle, par conséquent l'hypothèse de non saturation du besoin est vérifiée pour les biens X et Y.

4. Définition et calcul de l'utilité marginale pondérée

L'Um pondérée est l'Um d'un bien rapportée à son prix. Elle mesure la satisfaction procurée par la dépense d'une unité monétaire.

Calcul de l'Um pondérée : voir tableau supra.

5. Combinaison optimale et calcul de l'utilité totale

La règle qui détermine l'équilibre du consommateur est l'égalisation des utilités marginales pondérées des biens. (deuxième loi de Gossen).

$$\frac{Um_x}{P_x} = \frac{Um_y}{P_y} / x.P_x + y.P_y = R = 10\,dh$$

La combinaison optimale est (x=4 ; y=2).

La dépense correspondante est 1.4 + 3.2 = 10dh.

L'utilité totale est $UT = UT_X + UT_Y = 34 + 45 = 79$.

6. Cardinalité et additivité des utilités

La cardinalité : c'est une hypothèse qui signifie que l'utilité est mesurable par des nombres cardinaux (qui expriment la quantité et non l'ordre). Cependant l'utilité est un phénomène qualitatif, subjectif et psychologique. Elle est donc difficile à quantifier. La cardinalité demeure néanmoins une hypothèse commode pour distinguer l'utilité marginale de l'utilité totale.

L'additivité : C'est une hypothèse selon laquelle l'utilité d'un couple de biens est obtenue par l'addition des utilités des deux biens. C'est une hypothèse irréaliste car elle implique que les biens sont indépendants. Or, souvent les biens sont interdépendants et sont consommés de façon associée. Si certains biens sont consommés séparément, ils n'auraient aucune utilité.

Exercice 2

1. Loi de Gossen et évolution des utilités marginales des biens

Quantités de biens	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Utilité marginale de X	120	100	90	70	50	25	10	0	-10	-20
Utilité marginale de Y	240	200	180	140	100	50	20	0	-20	-40
Quantités de biens	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Um pondérée de X : $\frac{Um_x}{P_x}$	60	50	45	35	25	12,5	5	0	-5	-10
Um pondérée de Y : $\frac{Um_y}{P_y}$	60	50	45	35	25	12,5	5	0	-5	-10

D'après la 1ère loi de Gossen, l'Um d'un bien est sans cesse décroissante. En effet, le psychologue allemand a constaté que: "l'intensité d'un plaisir qui se prolonge finit par s'éteindre au point de satiété, au-delà de ce point le plaisir se transforme en peine". Dans notre cas les Um des biens X et Y sont décroissantes, s'annulent au point de satiété (x=7 et y=7) et sont par la suite négatives pour les quantités de X et Y égales à 8 et 9.

Solution

Fonction d'utilité : $U = f(x,y) = 2.xy + 3y$.

Fonction de contrainte : $R = xP_x + yP_y = 12x + 21y$

1/- Expression du TMS x à y

Le TMS peut se calculer de deux façons :

→ Expression algébrique du TMS x à y : $TMS_{x/y} = -\frac{dy}{dx}$

où $y = f(x)$ est l'expression de la courbe d'indifférence.

Soit U_0 une courbe d'indifférence. $U_0 = 2xy + 3y = y(2x+3)$

d'où $y = \frac{U_0}{2x+3} = f(x)$.

$$TMS_{x/y} = -\frac{dy}{dx} = -\left(\frac{U_0}{2x+3}\right)' = \boxed{\frac{-2U_0}{(2x+3)^2}} = -\frac{2(y.(2x+3))}{(2x+3)^2} = \frac{-2y}{2x+3}$$

→ Expression économique du TMS x à y : $TMS_{x/y} = \frac{Umx}{Umy} = -\frac{dy}{dx}$

$$TMS_{x/y} = \frac{Umx}{Umy} = \boxed{\frac{2y}{2x+3}}$$

2/- Equation de la droite du budget

$R = xP_x + yP_y$ d'où $y = -\frac{P_x}{P_y}.x + \frac{R}{P_y}$.

$150 = 12x + 21y$ d'où $\boxed{y = -\frac{12}{21}.x + \frac{150}{21}} = -\frac{4}{7}.x + \frac{50}{7}$

3/ Utilisation optimale du revenu

Le problème du c(ons)teur s'écrit de la façon suivante :

$$\begin{cases} \text{Max } U = 2xy + 3y \\ \text{Sous contrainte } 150 = 12x + 21y \end{cases}$$

Il existe différentes méthodes permettant de résoudre ce type de problème, à savoir :

- Méthode de substitution,
- Méthode du multiplicateur de Lagrange
- Méthode du TMS à l'équilibre.

- Méthode de substitution

$$\begin{cases} \text{Max } U = 2xy + 3y \\ \text{sous } 150 = 12x + 21y \end{cases}$$

Equation de la droite du budget : $y = \frac{-12}{21}x + \frac{150}{21} = \frac{-4}{7}x + \frac{50}{7}$

On remplace y par sa valeur dans la fct d'utilité pour transformer celle-ci en une fonction à une seule variable.

$U = f(x,y) = 2xy + 3y = 2x\left(\frac{-12}{21}x + \frac{150}{21}\right) + 3\left(\frac{-12}{21}x + \frac{150}{21}\right)$

$U = \frac{-24x^2}{21} + \frac{300x}{21} - \frac{36x}{21} + \frac{450}{21}$

$2x\left(-\frac{4}{7}x + \frac{50}{7}\right) + 3\left(-\frac{4}{7}x + \frac{50}{7}\right) = -\frac{8x^2}{7} + \frac{100x}{7} - \frac{12x}{7} + \frac{150}{7}$

$U = \frac{1}{21}\left(-24x^2 + 264x + 450\right) = f(x)$. $= \frac{1}{7}\left(-8x^2 + 88x + 150\right)$

$U = f(x)$ est maximale si $U' = 0$ et $U'' < 0$ $U' = -16x + 88 = 0$

→ Condition de premier ordre : $U' = f'(x) = 0$ $x = \frac{88}{16} = 5{,}5$

$U' = \frac{1}{21}\left(-48x + 264\right) = 0 \Rightarrow x = \frac{264}{48} = \boxed{5{,}5}$ $y = -\frac{4}{7}(5{,}5) + \frac{50}{7} = \frac{28}{7}$

Si $x = 5{,}5$ alors $y = \frac{-12}{21}(5{,}5) + \frac{150}{21} = -3{,}14 + 7{,}14 = \boxed{4}$ $= 4$

→ Condition de second ordre : $U'' < 0$

$U'' = -\frac{48}{21} < 0$ $U'' = -\frac{16}{7} < 0$

Donc pour des valeurs : $x_0 = 5{,}5$ et $y_0 = 4$ U est maximale.

$U = 2xy + 3y = 2(5{,}5)(4) + 3(4) = \boxed{56}$

$P_x = 12$	$P_y = 21$	$R = 150$
$x = 5{,}5$	$y = 4$	$U = 56$

- Méthode du multiplicateur de Lagrange

$$\begin{cases} \text{Max} \quad U = 2xy + 3y \\ \text{sous} \quad 150 = 12x + 21y \end{cases}$$

La fonction de Lagrange s'écrit de la façon suivante

$\mathcal{L}$ = fonction objectif + λ (fonction contrainte nulle).

$$\mathcal{L} = 2xy + 3y + \lambda(150 - 12x - 21y) = f(x, y, \lambda)$$

$\mathcal{L}$ est maximale si deux conditions sont remplies.

- Condition de 1er ordre

$$\mathcal{L}'_x = \frac{d\mathcal{L}}{dx} = 2y - 12\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{2y}{12} \quad (1)$$

$$\mathcal{L}'_y = \frac{d\mathcal{L}}{dy} = (2x + 3) - 21\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{2x+3}{21} \quad (2)$$

$$\mathcal{L}'_\lambda = 150 - 12x - 21y = 0 \quad (3)$$

(1) et (2) : $\frac{2y}{12} = \frac{2x+3}{21} \Rightarrow \frac{y}{6} = \frac{2x+3}{21}$

$$\Rightarrow 21y = 12x + 18$$

$$7y = 4x + 6 \quad \text{et} \quad \boxed{y = \frac{4x+6}{7}}$$

Dans (3) je remplace y par $\frac{4x+6}{7}$

$$150 = 12x + 21\left(\frac{4x+6}{7}\right) = 12x + 3(4x + 6)$$

$$150 = 12x + 12x + 18$$

$$132 = 24x \quad \text{et} \quad x = \frac{132}{24} = \boxed{5{,}5}$$

Pour $x = 5{,}5$, $y = \frac{4(5{,}5) + 6}{7} = \frac{28}{7} = \boxed{4}$

- Condition de second ordre

$$\begin{vmatrix} \mathcal{L}''_{xx} & \mathcal{L}''_{xy} & \mathcal{L}''_{x\lambda} \\ \mathcal{L}''_{yx} & \mathcal{L}''_{yy} & \mathcal{L}''_{y\lambda} \\ \mathcal{L}''_{\lambda x} & \mathcal{L}''_{\lambda y} & \mathcal{L}''_{\lambda\lambda} \end{vmatrix} > 0$$

Ce déterminant doit être inférieur à 0 s'il s'agit de minimiser $\mathcal{L}$.

Nous avons déjà :

$L'_x = 2y - 12\lambda$; d'où $L''_{xx} = 0$, $L''_{xy} = 2$; et $L''_{x\lambda} = -12$

$L'_y = 2x + 3 - 21\lambda$; d'où $L''_{yx} = 2$, $L''_{yy} = 0$ et $L''_{y\lambda} = -21$

$L'_\lambda = 150 - 12x - 21y$; d'où $L''_{\lambda x} = -12$, $L''_{\lambda y} = -21$ et $L''_{\lambda\lambda} = 0$

Ainsi on construit le det.

$$\det = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -12 \\ 2 & 0 & -21 \\ -12 & -21 & 0 \end{vmatrix}$$

Méthodes de calcul de déterminant

1° - Si une seule ligne (ou colonne) se répète, alors det = 0

exemple :
$$\begin{vmatrix} -1 & 4 & -1 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

2° - Si une ligne (ou colonne) ne contient que des zéros, alors det = 0

exemple :
$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & -12 \\ 0 & 2 & -21 \\ 0 & -12 & -21 \end{vmatrix} = 0$$

3° - Méthode de SARRUS

det = [Somme des produits des diagonales principales] $-$ [Somme des produits des diagonales secondaires]

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} 0 & 2 & -12 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -21 & 2 & 0 \\ -12 & -21 & 0 & -12 & -21 \end{array}\right| = [(0.0.0) + (2.-21.-12) + (-12.2.-21)] - [(-12.0.-12) + (-21.-21.0) + (0.2.2)]$$

$= [504 + 504] - [0] = 1008 > 0$

Finalement $(x = 5{,}5 , y = 4)$ est la combinaison optimale et $U = 56$

4°) - <u>Minimisation sous contrainte</u>

Le problème d'optimisation par minimisation s'écrit de la façon suivante

$$\begin{cases} \text{Min} \quad R = 12x + 21y \\ \text{s.c.} \quad 70 = 2xy + 3y \end{cases}$$

→ <u>Méthode du TMS à l'optimum</u>

* À l'optimum, $TMS_{x,y} = \boxed{\dfrac{Um_x}{Um_y} = \dfrac{P_x}{P_y}}$

$\dfrac{Um_x}{Um_y} = \dfrac{2y}{2x+3} = \dfrac{P_x}{P_y} = \dfrac{12}{21}$ soit $\dfrac{2y}{2x+3} = \dfrac{12}{21} = \dfrac{4}{7}$) $14y = 8x + 12$

$7y = 4x + 6$

$\boxed{y = \dfrac{4x+6}{7}}$

On en déduit : $42y = 24x + 36$

$21y = 12x + 18 \Rightarrow y = \dfrac{12x+18}{21} = \boxed{\dfrac{4x+6}{7}}$

On remplace y par $\dfrac{4x+6}{7}$ dans la fct de contrainte.

$70 = 2x\left(\dfrac{4x+6}{7}\right) + 3\left(\dfrac{4x+6}{7}\right) = \dfrac{1}{7}(8x^2 + 12x + 12x + 18)$

$(70 \times 7) = 8x^2 + 24x + 18$

$490 = 8x^2 + 24x + 18$

$472 = 8x^2 + 24x$

soit $8x^2 + 24x - 472 = 0$

ou bien $x^2 + 3x - 59 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = (3)^2 - 4(-59) = 245$ et $\sqrt{\Delta} = 15,65$

$\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_1 = \dfrac{-3+15,65}{2} = \boxed{6,32}$ et $x_2 = \dfrac{-3-15,65}{2} < 0$ à rejeter

Si $x = 6,32$ alors $y = \dfrac{4(6,32)+6}{7} = \boxed{4,46}$

Revenu minimum : $R = 12(6,32) + 21(4,46) = \boxed{169,5}$

$U = 2(6,32)(4,46) + 3(4,46)$

$= 56,37 + 13,38 = \boxed{69,75} = 70$

5) - valeur du TMS x à y au point d'équilibre

A l'équilibre question 3 : $x = 5,5$, $y = 4$ et $U_1 = 56$

$$TMS_{x/y} = \frac{-2.U_0}{(2x+3)^2} = \frac{-2.56}{(2(5,5)+3)^2} = \frac{112}{196} = \boxed{0,57}$$

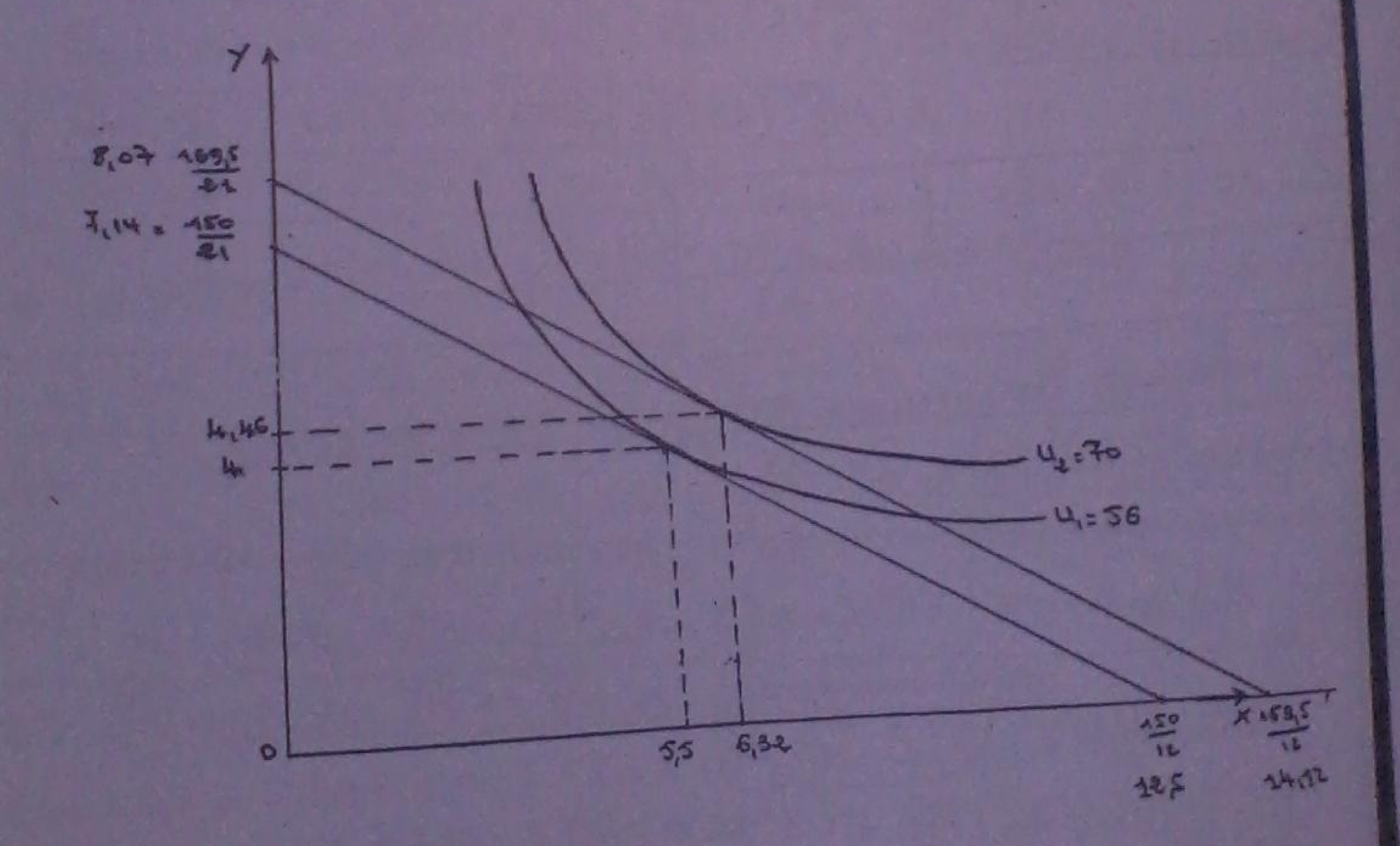
ou bien $TMS_{x/y} = -\frac{2y}{2x+3} = \frac{-2.4}{2(5,5)+3} = -0,57$ $|TMS_{x/y}| = 0,57$

$$TMS_{x/y} = \frac{Um_x}{Um_y} = \frac{2y}{2x+3} = \frac{2.4}{2(5,5)+3} = \frac{8}{14} = \boxed{0,57} = \frac{P_x}{P_y} = \frac{12}{21}$$

Signification :

Au point d'équilibre, le c^teur est prêt à céder 0,57 unités du bien y pour une unité supplémentaire du bien x tout en conservant le même niveau de satisfaction.

6) - Représentations graphiques



Fonction d'utilité : $U = f(x,y) = 2x^2y$

1°- Combinaison optimale : Situation initiale

Méthode de Lagrange : $L = 2x^2y + \lambda(150 - 10x - 20y)$

$L'_x = 4xy - 10\lambda = 0 \Rightarrow 4xy = 10\lambda$ (1)

$L'_y = 2x^2 - 20\lambda = 0 \Rightarrow 2x^2 = 20\lambda$ (2)

$L'_\lambda = 150 - 10x - 20y = 0$ (3)

(1)/(2) $\Rightarrow \frac{4xy}{2x^2} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{2y}{x} = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{x = 4y}$

(3) : $150 = 10x + 20y$
$= 10(4y) + 20y = 60y$
$\Rightarrow y = \frac{150}{60} = \boxed{2,5}$ et $x = 4 \cdot 2,5 = \boxed{10}$

Indice d'utilité :

$U_1 = 2(10)^2 \cdot (2,5) = \boxed{500}$

$P_x = 10$	$R = 150$	$x_1 = 10$
$P_y = 20$	$U_1 = 500$	$y_1 = 2,5$

2°- Nouvelle Combinaison optimale : Situation finale.

Situation finale S_2 : $P_x = 15$.

Maximiser $U = 2x^2 \cdot y$ sachant que $150 = 15x + 20y$

A L'optimum : $\frac{Um_x}{Um_y} = \frac{P_x}{P_y} \Rightarrow \frac{4xy}{2x^2} = \frac{15}{20} \Rightarrow \frac{2y}{x} = \frac{15}{20}$

on en déduit : $\boxed{y = \frac{15}{40} \cdot x}$

$150 = 15x + 20\left(\frac{15}{40} x\right) = 15x + 7,5x = 22,5x$

$x = \frac{150}{22,5} = \boxed{6,66}$ et $y = \frac{15}{40} \cdot 6,66 = 2,4975 = \boxed{2,5}$

Nouvel indice d'utilité : $U_2 = 2.(6,66)^2.(2,50) = \boxed{221,77}$

$P_x = 15$	$U_2 = 221,77$	$x_2 = 6,66$
$P_y = 20$	$R = 150$	$y_2 = 2,50$

→ **Situation intermédiaire S_0**

Minimiser $R = 15x + 20y$ | $U_0 = U_1 = 500 = 2x^2.y$

A l'optimum : $\frac{Umx}{Umy} = \frac{P_x}{P_y} \Rightarrow y = \frac{15}{40}.x$

$500 = 2x^2.y = 2x^2.\frac{15}{40}.x = \frac{15}{20}.x^3$

$10.000 = 15.x^3 \Rightarrow x^3 = 666,6$ soit $x = \boxed{8,74}$

$y = \frac{15}{40}.(8,74) = \boxed{3,28}$

R_0 minimum $= 15(8,74) + 20(3,28) = \boxed{196,7}$

$P_x = 15$	$U_0 = 500$	$x_0 = 8,74$
$P_y = 20$	$R_0 = 196,7$	$y_0 = 3,28$

→ **Décomposition de l'effet prix en ES et ER**

Δx et Δy	ES : $S_1 \rightarrow S_0$	ER : $S_0 \rightarrow S_2$	ET : $S_1 \rightarrow S_2$
Δx	$x_0 - x_1$ $8,74 - 10 = -1,26$	$x_2 - x_0$ $6,66 - 8,74 = -2,08$	$x_2 - x_1$ $6,66 - 10 = -3,34$
Δy	$y_0 - y_1$ $3,28 - 2,5 = +0,78$	$y_2 - y_0$ $2,5 - 3,28 = -0,78$	$y_2 - y_1$ $2,5 - 2,5 = 0$

3°- **Signes des ES et ER et nature des biens.**

→ $ES_x = \Delta x = -1,26 < 0$: Qx a diminué car Px a augmenté.

→ $ER_x = \Delta x = -2,08 < 0$: Qx a diminué car Rréel a diminué.

Qx varie dans le sens inverse de Px et dans le même sens que le revenu ; donc x est un bien normal.

→ $ES_y = \Delta y = +0,78 > 0$: Qy a augmenté car y est devenu relativement moins cher.

→ $ER_y = \Delta y = -0,78 < 0$: Qy a diminué car R réel a diminué. y est donc un bien normal.

3°- Variation du prix du bien x :

→ Courbe de Consommation prix : C'est une ligne qui relie les points d'équilibre successifs, suite à la variation du prix d'un bien, le prix de l'autre bien et le revenu nominal restant constants.

→ Equation de la demande du bien x :

Elle puise ses origines des conditions de maximisation de l'utilité

$$\text{Max } U = 2x^2 \cdot y \mid 150 = x \cdot P_x + 20 \cdot y$$

$$L = 2x^2 \cdot y + \lambda(150 - x \cdot P_x - 20y)$$

$$L'_x = 4x \cdot y - \lambda \cdot P_x = 0 \quad (1)$$

$$L'_y = 2x^2 - 20\lambda = 0 \quad (2)$$

$$L'_\lambda = 150 - x \cdot P_x - 20y = 0 \quad (3)$$

$$(1)/(2) : \frac{2y}{x} = \frac{P_x}{20} \Rightarrow x \cdot P_x = 40 \cdot y \Rightarrow y = \frac{x \cdot P_x}{40}$$

$$(3) : 150 = x \cdot P_x + 20\left(\frac{x \cdot P_x}{40}\right) = x \cdot P_x + \frac{x \cdot P_x}{2} = \frac{3x \cdot P_x}{2}$$

$$3x \cdot P_x = 300 \Rightarrow x \cdot P_x = 100 \Rightarrow x = f(P_x) = 100 \cdot P_x^{-1}$$

→ Optimalité de la fonction de demande :

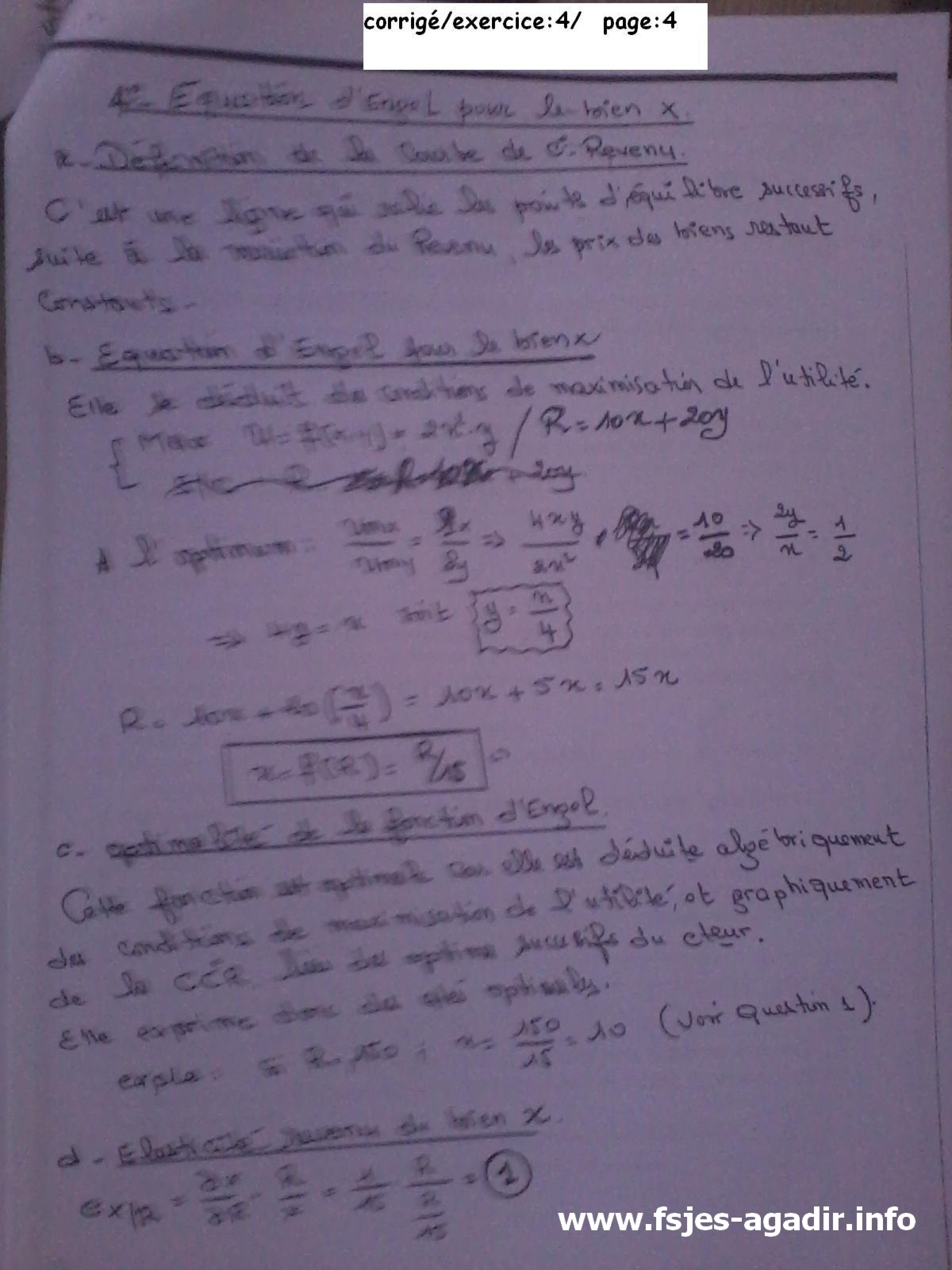
Déduite algébriquement des conditions de maximisation de l'utilité et graphiquement de la courbe de C° prix lieu des optima successifs, cette fct° de dde est forcément rationnelle. Elle exprime donc des quantités optimales.

Exple : $P_x = 10$: $x = \frac{100}{10} = 10$ (voir question 1).

→ Elasticité - prix de la demande :

Etant une fonction puissance, cette demande est une demande iso. élastique. Son élasticité est toujours d'équation à son exposant -1

vérification : $e_{x/P_x} = \frac{\partial x}{\partial P_x} \cdot \frac{P_x}{x} = -\frac{100}{P_x^2} \cdot \frac{P_x}{\frac{100}{P_x}} = -\frac{100}{P_x^2} \cdot \frac{P_x^2}{100} = -1$



4°- Equation d'Engel pour le bien x.

a- Définition de la Courbe de C. Revenu.

C'est une ligne qui relie les points d'équilibre successifs, suite à la variation du Revenu, les prix des biens restant constants.

b- Equation d'Engel pour le bien x

Elle se déduit des conditions de maximisation de l'utilité.

$$\begin{cases} \text{Max } U = f(x,y) = 2x^2.y \;/\; R = 10x + 20y \end{cases}$$

A l'optimum : $\frac{Umx}{Umy} = \frac{Px}{Py} \Rightarrow \frac{4xy}{2x^2} = \frac{10}{20} \Rightarrow \frac{2y}{x} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow 4y = x$ soit $y = \frac{x}{4}$

$R = 10x + 20\left(\frac{x}{4}\right) = 10x + 5x = 15x$

$$x = f(R) = R/15$$

c- optimalité de la fonction d'Engel.

Cette fonction est optimale car elle est déduite algébriquement des conditions de maximisation de l'utilité, et graphiquement de la CCR lieu des optima successifs du cteur.

Elle exprime donc des qtés optimales.

exple : si $R = 150$; $x = \frac{150}{15} = 10$ (voir question 1).

d- Elasticité revenu du bien x.

$e_{x/R} = \frac{\partial x}{\partial R} \cdot \frac{R}{x} = \frac{1}{15} \cdot \frac{R}{\frac{R}{15}} = 1$

Professeur [illegible]

5°/- Statut du bien x

$e_{x/P_x} = -1$: La quantité demandée du bien x varie dans le sens inverse du prix P_x.

$e_{x/R} = 1$: La quantité demandée du bien x varie dans le même sens que le revenu

Le bien x est un bien normal

Exercice 5

Fonction d'utilité: $U = f(x,y) = x.(y+1)$; $R = 190 = 5.x + 10.y$

1. Passage de la fonction d'utilité à la fonction de demande

La fonction de demande d'un bien X s'exprime soit en fonction du revenu ($x=f(R)$: fonction d'Engel), soit en fonction du prix du bien ($x=f(P_x)$: fonction de demande).

Déduction de la fonction d'Engel :

La fonction d'Engel pour un bien se déduit algébriquement des conditions de maximisation de la fonction d'utilité. Géométriquement la courbe d'Engel se dérive de la courbe de consommation-revenu, lieu des points représentatifs des optima du consommateur.

La déduction de la fonction d'Engel se fait sous l'hypothèse de la variation du revenu à prix des biens constants (hypothèse ceteris paribus).

Déduction de la fonction de demande :

La fonction de demande d'un bien se déduit algébriquement des conditions de maximisation de la fonction d'utilité. Géométriquement la courbe de demande se dérive de la courbe de consommation-prix, lieu des points représentatifs des optima du consommateur.

La déduction de la fonction de demande se fait sous l'hypothèse de la variation du prix du bien à revenu et prix de l'autre bien constants. (hypothèse toutes choses égale par ailleurs).

2. Illustration de la démarche

Nous allons illustrer la démarche décrite en haut en calculant pour le bien X la fonction d'Engel et la fonction de demande.

2.1. Variation du revenu et fonction d'Engel (bien X)

Les fonctions d'Engel se déduisent des conditions d'optimisation de l'utilité pour R quelconque.

$$\begin{cases} \text{Maximiser } U = f(x,y) = x(y+1) \\ \text{Sous la contrainte } 190 = 5.x + 10.y \end{cases}$$

A l'équilibre, $TMS_{x/y} = \frac{Umx}{Umy} = \frac{Px}{Py}$

$$\frac{Um_x}{Um_y} = \frac{y+1}{x} = \frac{Px}{Py} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 2y+2 \Rightarrow y = \frac{x-2}{2} = \frac{x}{2} - 1$$

a. Fonction d'Engel pour le bien X

$R = 5.x + 10.y$ et $y = \frac{x}{2} - 1$

$R = 5.x + 10.(\frac{x}{2} - 1) = 10.x - 10$

$R + 10 = 10.x$ soit : $x = f(R) = \frac{R+10}{10}$

$U = f(x, y) = x(y+1) = xy + x$

$R = 190 = 5x + 10y$

- **Variation du R et fct d'Engel pour x**

$$\begin{cases} \text{Max } U = xy + x \\ \text{s/c } R = 5x + 10y \end{cases}$$

À l'optimum $\frac{Umx}{Umy} = \frac{P_x}{P_y} \Rightarrow \frac{y+1}{x} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$

$2y + 2 = x \Rightarrow 2y = x - 2$

$$\boxed{y = \frac{x}{2} - 1}$$

$R = 5x + 10y$ et $y = \frac{x}{2} - 1$

$R = 5x + 10\left(\frac{x}{2} - 1\right) = 5x + 5x - 10$

$R = 10x - 10$ soit $10x = R + 10$

ou bien : $x = \frac{R + 10}{10} = \boxed{\frac{R}{10} + 1} = f(R)$

fonction d'Engel pour le bien x.

- **Variation de P_x et fonction de demande du bien x**

$$\begin{cases} \text{Maximiser } U = xy + x \\ \text{s/c : } 190 = xP_x + 10y \end{cases}$$

À l'optimum : $\frac{Umx}{Umy} = \frac{P_x}{P_y} \Rightarrow \frac{(y+1)}{x} = \frac{P_x}{10}$

$xP_x = 10(y+1) = 10y + 10$

$10y = xP_x - 10 \Rightarrow y = \frac{xP_x}{10} - \frac{10}{10}$

$$\boxed{y = \frac{xP_x}{10} - 1}$$

$R = xP_x + 10\left(\frac{xP_x}{10} - 1\right)$

$= xP_x + xP_x - 10 = 2xP_x - 10$

$2xP_x = R + 10$ soit $\boxed{x = \frac{R + 10}{2P_x} = \frac{R}{2P_x} + \frac{5}{P_x} = f(P_x)}$

fonction de demande du bien x.